Il fascino discreto dei numeri

Camillo Trapani,
Dipartimento di Matematica e Informatica

Accademia Nazionale di Lettere, Scienze e Arti, 15 Aprile 2019

Sommario

The end of the story

Nel 2016 è stato pubblicato in Italia un piccolo libro di Donald Knuth dal titolo

Numeri surreali : come due ex-studenti scoprirono la matematica pura e trovarono la vera felicità

(Ed. Franco Angeli, traduzione dell'originale del 1974).

The end of the story

Nel 2016 è stato pubblicato in Italia un piccolo libro di Donald Knuth dal titolo

Numeri surreali : come due ex-studenti scoprirono la matematica pura e trovarono la vera felicità
(Ed. Franco Angeli, traduzione dell'originale del 1974).

Alice e Bill si trovano in una spiaggia per una vacanza per ritrovare se stessi.

The end of the story

Nel 2016 è stato pubblicato in Italia un piccolo libro di Donald Knuth dal titolo

Numeri surreali : come due ex-studenti scoprirono la matematica pura e trovarono la vera felicità
(Ed. Franco Angeli, traduzione dell'originale del 1974).

Alice e Bill si trovano in una spiaggia per una vacanza per ritrovare se stessi.

Mezza sepolta nella sabbia ritrovano casualmente una pietra scritta in ebraico. E cominciano a cercare di capire. . .

The end of the story

Nel 2016 è stato pubblicato in Italia un piccolo libro di Donald Knuth dal titolo

Numeri surreali : come due ex-studenti scoprirono la matematica pura e trovarono la vera felicità
(Ed. Franco Angeli, traduzione dell'originale del 1974).

Alice e Bill si trovano in una spiaggia per una vacanza per ritrovare se stessi.

Mezza sepolta nella sabbia ritrovano casualmente una pietra scritta in ebraico. E cominciano a cercare di capire. . .

Forse è il primo libro del Pentateuco di Mosè. . . , ma forse no. . .

All'inizio era il vuoto. . .

All'inizio era il vuoto. . .

All'inizio, nulla era se non il vuoto e il caos, e J. H. W. H. Conway creò i numeri. Conway disse: "Ci siano due regole che generano tutti i numeri, i piccoli e i grandi".

All'inizio era il vuoto. . .

All'inizio, nulla era se non il vuoto e il caos, e J. H. W. H. Conway creò i numeri. Conway disse: "Ci siano due regole che generano tutti i numeri, i piccoli e i grandi".

"Questa sarà la prima regola. Ogni numero nasce da due insiemi di numeri già esistenti, tali che nessun membro dell'insieme di sinistra sia superiore o eguale a un qualsiasi membro dell'insieme di destra".

"Questa sarà la seconda regola. Un numero è minore o uguale a un altro numero se e solamente se nessun membro dell'insieme di sinistra del primo numero è superiore o uguale al secondo numero e se nessun membro dell'insieme di destra del secondo numero è inferiore o uguale al primo numero.

All'inizio era il vuoto...

All'inizio, nulla era se non il vuoto e il caos, e J. H. W. H. Conway creò i numeri. Conway disse: "Ci siano due regole che generano tutti i numeri, i piccoli e i grandi".

"Questa sarà la prima regola. Ogni numero nasce da due insiemi di numeri già esistenti, tali che nessun membro dell'insieme di sinistra sia superiore o eguale a un qualsiasi membro dell'insieme di destra".

"Questa sarà la seconda regola. Un numero è minore o uguale a un altro numero se e solamente se nessun membro dell'insieme di sinistra del primo numero è superiore o uguale al secondo numero e se nessun membro dell'insieme di destra del secondo numero è inferiore o uguale al primo numero.

E Conway guardò alle due regole che aveva creato e pensò che era buono.

E il primo numero fu creato a partire dal vuoto a destra e a sinistra. Conway lo chiamò "Zero" e disse: "Che lo Zero sia il segno che separa i positivi dai negativi".

Conway provò che zero è inferiore o uguale a zero e pensò che era buono. E fu sera e fu mattina e fu il giorno zero.

E il primo numero fu creato a partire dal vuoto a destra e a sinistra. Conway lo chiamò "Zero" e disse: "Che lo Zero sia il segno che separa i positivi dai negativi".

Conway provò che zero è inferiore o uguale a zero e pensò che era buono. E fu sera e fu mattina e fu il giorno zero.

E il giorno seguente altri due numeri furono creati, l'uno avente zero come insieme di sinistra e l'altro avente zero come insieme di destra.

E Conway chiamò il primo 'Uno' e il secondo 'Meno Uno'. E Conway provò che Meno Uno è inferiore ma non uguale a Zero e che Zero è inferiore ma non uguale a Uno.

E fu sera...

Con questo gioco letterario Knut trova modo di spiegare la costruzione dei numeri fatta da John Horton Conway (1937), matematico di Princeton.

Con questo gioco letterario Knut trova modo di spiegare la costruzione dei numeri fatta da John Horton Conway (1937), matematico di Princeton.

Singolare: un'opera di fantasia introduce concetti matematici.

Con questo gioco letterario Knut trova modo di spiegare la costruzione dei numeri fatta da John Horton Conway (1937), matematico di Princeton.

Singolare: un'opera di fantasia introduce concetti matematici.

Il libro esce negli Stati Uniti prima della pubblicazione di "On Numbers and Games" (1976) dove Conway illustra questa costruzione fatta essenzialmente nell'ambito della teoria dei giochi.

Con questo gioco letterario Knut trova modo di spiegare la costruzione dei numeri fatta da John Horton Conway (1937), matematico di Princeton.

Singolare: un'opera di fantasia introduce concetti matematici.

Il libro esce negli Stati Uniti prima della pubblicazione di "On Numbers and Games" (1976) dove Conway illustra questa costruzione fatta essenzialmente nell'ambito della teoria dei giochi.

Knut chiama i numeri di Conway numeri surreali. L'idea piace a Conway che la adotta.

Con questo gioco letterario Knut trova modo di spiegare la costruzione dei numeri fatta da John Horton Conway (1937), matematico di Princeton.

Singolare: un'opera di fantasia introduce concetti matematici.

Il libro esce negli Stati Uniti prima della pubblicazione di "On Numbers and Games" (1976) dove Conway illustra questa costruzione fatta essenzialmente nell'ambito della teoria dei giochi.

Knut chiama i numeri di Conway numeri surreali. L'idea piace a Conway che la adotta.

Man mano che il libro avanza si vedono nascere tutti i numeri conosciuti, ma si va anche oltre. . .

Ultimo (?) capitolo di un lunghissimo processo

Numeri

- NATURALI: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
- INTERI: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$
- RAZIONALI: $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{12}{4}, \frac{29}{13} \ldots$

- REALI (Dedekind): Tutti i precedenti + numeri strani come

$$\sqrt{2} \qquad \pi$$

- IPERREALI (Robinson)
- SURREALI (Conway)

I numeri surreali di Conway includono tutti i numeri elencati sopra e anche i numeri transfiniti di Cantor

Un numero strano: $\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} = 1,&414213562373095048801688724209698078\\
&569671875376948073176679737990732478462107\\
&038850387534327641572735013846230911\\
&2297024924836055850737212644121497099935831\\
&413222665927505592755799950501152782\\
&6057147010955997160597027453459686201472851\\
&741864088919860955232923048430871432 1\\
&4508397626036279952514079896872533965463318\\
&088296406206152583523950547457502877 5\\
&9961729835575220337531857011354374603408498\\
&847160386899970699004815030544027790 3\\
&1645424782306849293691862158057846311159666\\
&871301301561856898723723528850926486 1\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Un numero strano: π, il famigerato 3,14

$$\begin{aligned}\pi = 3{,}&14159265358979323846264 33\\ &83279502884197169399375 10\\ &58209749445923078164062 86\\ &20899862803482534211706 7\ldots\end{aligned}$$

Un numero strano: π, il famigerato 3,14

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706\ldots$$

Area del cerchio $A = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot r^2$

Un numero strano: π, il famigerato 3,14

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706\ldots$$

Area del cerchio $A = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot r^2$

Numero famoso e festeggiato: 14 Marzo = = March 3 = 3.14 = π-day, Giornata mondiale della Matematica.

π è più strano di $\sqrt{2}$ ...

Un numero strano: π, il famigerato 3,14

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706\ldots$$

Area del cerchio $A = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot r^2$

Numero famoso e festeggiato: 14 Marzo $==$ March 3 $= 3.14 =$ π-day, Giornata mondiale della Matematica.

π è più strano di $\sqrt{2}$ ...

- non si può esprimere come rapporto di numeri interi (irrazionale, come $\sqrt{2}$)

Un numero strano: π, il famigerato 3,14

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433$$
$$8327950288419716939937510$$
$$5820974944592307816406286$$
$$208998628034825342117067\ldots$$

Area del cerchio $A = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot r^2$

Numero famoso e festeggiato: 14 Marzo = = March 3 = 3.14 = π-day, Giornata mondiale della Matematica.

π è più strano di $\sqrt{2}$ ...

- non si può esprimere come rapporto di numeri interi (irrazionale, come $\sqrt{2}$)
- nessuna sua potenza π^n è un intero (trascendenza)

Un numero strano: π, il famigerato 3,14

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 7\ldots$$

Area del cerchio $A = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot r^2$

Numero famoso e festeggiato: 14 Marzo = = March 3 = 3.14 = π-day, Giornata mondiale della Matematica.

π è più strano di $\sqrt{2}$ ...

- non si può esprimere come rapporto di numeri interi (irrazionale, come $\sqrt{2}$)
- nessuna sua potenza π^n è un intero (trascendenza)

Come nascono questi numeri?

Un numero strano: π, il famigerato 3,14

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433\\ 8327950288419716939937510\\ 5820974944592307816406286\\ 2089986280348253421170 67\ldots$$

Area del cerchio $A = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot r^2$

Numero famoso e festeggiato: 14 Marzo = = March 3 = 3.14 = π-day, Giornata mondiale della Matematica.

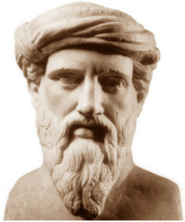
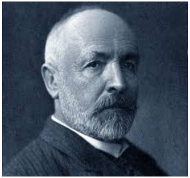
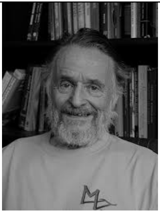
π è più strano di $\sqrt{2}$ ...

- non si può esprimere come rapporto di numeri interi (irrazionale, come $\sqrt{2}$)
- nessuna sua potenza π^n è un intero (trascendenza)

Come nascono questi numeri?

si parte dai numeri naturali.

Alcuni dei protagonisti. . .

		
Euclide	Pitagora	Fibonacci
		
Dedekind	Cantor	Conway

0 e 1

NUMMERI

- Conterò poco, è vero:
- diceva l'Uno ar Zero -
ma tu che vali? Gnente: propio gnente.
Sia ne l'azzione come ner pensiero
rimani un coso voto e inconcrudente.
Io, invece, se me metto a capofila
de cinque zeri tale e quale a te,
lo sai quanto divento? Centomila.
È questione de nummeri. A un dipresso
è quello che succede ar dittatore
che cresce de potenza e de valore
più so' li zeri che je vanno appresso.

Trilussa, 1944

0 e 1

Al di là dell'apologo, 0 e 1 sono le pietre angolari su cui si basa la costruzione di tutti i numeri.

0 e 1

Al di là dell'apologo, 0 e 1 sono le pietre angolari su cui si basa la costruzione di tutti i numeri.

- Se conosciamo 0 e 1 conosciamo immediatamente 2 e 3 ecc.

$$2 := \{0,1\} \quad 3 := \{0,1,2\} \quad 4 := \{0,1,2,3\} \cdots .$$

0 e 1

Al di là dell'apologo, 0 e 1 sono le pietre angolari su cui si basa la costruzione di tutti i numeri.

- Se conosciamo 0 e 1 conosciamo immediatamente 2 e 3 ecc.

$$2 := \{0, 1\} \quad 3 := \{0, 1, 2\} \quad 4 := \{0, 1, 2, 3\} \cdots .$$

- Sistema di numerazione binario; qualsiasi numero intero si esprime unicamente usando 0 e 1

$$101101 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 32+0+8+4+0+1 = 45$$

Nota già ai sacerdoti egizi (Papiro di Rhind, 1650 a.C.)

0 e 1

Al di là dell'apologo, 0 e 1 sono le pietre angolari su cui si basa la costruzione di tutti i numeri.

- Se conosciamo 0 e 1 conosciamo immediatamente 2 e 3 ecc.

$$2 := \{0,1\} \quad 3 := \{0,1,2\} \quad 4 := \{0,1,2,3\} \cdots .$$

- Sistema di numerazione binario; qualsiasi numero intero si esprime unicamente usando 0 e 1

$$101101 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32+0+8+4+0+1 = 45$$

Nota già ai sacerdoti egizi (Papiro di Rhind, 1650 a.C.)

Nel Medioevo uso inconsapevole della n. binaria per moltiplicare i numeri.
Per es. per calcolare 51×11

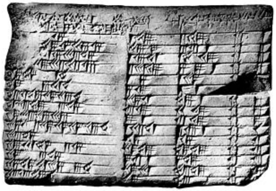
$$51 \times 1 = 51$$
$$51 \times 2 = 102$$
$$51 \times 4 = 204$$
$$51 \times 8 = 408$$

si raddoppiava il moltiplicatore e si prendevano i prodotti relativi alle potenze di 2 la cui somma desse 11

$$51 \times 11 = 51 \times (1+2+8) = 51 \times 1 + 51 \times 2 + 51 \times 8 = 51 + 102 + 408 = 561.$$

Quando nascono i numeri?

- Gli storici fissano le origini del numero al 2500 - 2000 a.C.
  Tavoletta Plimpton 322 babilonese (Columbia Univ.): contiene tavole numeriche, elenchi di numeri utilizzati per calcoli astronomici e di agrimensura risalenti al 1800 a.C.
- Nelle culture dell'antica Mesopotamia esistevano tabelle per le addizioni e le sottrazioni databili intorno al 2350 a.C.



I numeri naturali

Quelli che ci provengono direttamente (?) dalla natura

I numeri naturali

Quelli che ci provengono direttamente (?) dalla natura

- idea di singolo e di plurimo

I numeri naturali

Quelli che ci provengono direttamente (?) dalla natura

- idea di singolo e di plurimo
- presente a livello elementare nei neonati e negli animali

I numeri naturali

Quelli che ci provengono direttamente (?) dalla natura

- idea di singolo e di plurimo
- presente a livello elementare nei neonati e negli animali
- tipica dell'uomo: percezione della loro infinità

I numeri naturali

Quelli che ci provengono direttamente (?) dalla natura

- idea di singolo e di plurimo
- presente a livello elementare nei neonati e negli animali
- tipica dell'uomo: percezione della loro infinità

Il primo uomo che colse l'analogia esistente tra un gruppo di sette pesci e un gruppo di sette giorni compì un notevole passo avanti nella storia del pensiero

Alfred Whitehead, 1861-1947

Numerosità e Numeri

Dio ha creato i numeri naturali; il resto è opera dell'uomo

Leopold Kronecker

Ma è così?

Numerosità e Numeri

Dio ha creato i numeri naturali; il resto è opera dell'uomo

Leopold Kronecker

Ma è così?

- Studi ed esperimenti di psicologi e neuroscienziati sul senso della numerosità e del numero.

  Stanislas Dehaene, neuroscienziato, studi sulla cognizione numerica *The number sense, 1997*

Numerosità e Numeri

Dio ha creato i numeri naturali; il resto è opera dell'uomo

Leopold Kronecker

Ma è così?

- Studi ed esperimenti di psicologi e neuroscienziati sul senso della numerosità e del numero.

  Stanislas Dehaene, neuroscienziato, studi sulla cognizione numerica *The number sense, 1997*

- Gli esperimenti su animali (Premack, Woodroof) suggeriscono che diversi animali hanno un senso del numero; possono stimare piccole numerosità

  Alcuni (scimpanzé) compiono in maniera naturale e spontanea semplici operazioni anche con numeri non interi.

  Un limitato senso del numero (fino a tre, quattro) è presente in diverse specie animali

Numerosità e Numeri

Dio ha creato i numeri naturali; il resto è opera dell'uomo

Leopold Kronecker

Ma è così?

- Studi ed esperimenti di psicologi e neuroscienziati sul senso della numerosità e del numero.

  Stanislas Dehaene, neuroscienziato, studi sulla cognizione numerica *The number sense, 1997*

- Gli esperimenti su animali (Premack, Woodroof) suggeriscono che diversi animali hanno un senso del numero; possono stimare piccole numerosità

  Alcuni (scimpanzé) compiono in maniera naturale e spontanea semplici operazioni anche con numeri non interi.

  Un limitato senso del numero (fino a tre, quattro) è presente in diverse specie animali

- Stessi risultati in esperienze con neonati o bambini molto piccoli (K. Wynn, *Nature*, 1992).

Numerosità e Numeri

Dio ha creato i numeri naturali; il resto è opera dell'uomo

Leopold Kronecker

Ma è così?

- Studi ed esperimenti di psicologi e neuroscienziati sul senso della numerosità e del numero.

  Stanislas Dehaene, neuroscienziato, studi sulla cognizione numerica *The number sense, 1997*

- Gli esperimenti su animali (Premack, Woodroof) suggeriscono che diversi animali hanno un senso del numero; possono stimare piccole numerosità

  Alcuni (scimpanzé) compiono in maniera naturale e spontanea semplici operazioni anche con numeri non interi.

  Un limitato senso del numero (fino a tre, quattro) è presente in diverse specie animali

- Stessi risultati in esperienze con neonati o bambini molto piccoli (K. Wynn, *Nature*, 1992).

- Conclusione: numerosità e numero fanno parte del patrimonio genetico di molte specie.

  L'uomo è l'unico che può generare la successione dei numeri $1, 2, 3, 4, \ldots$

Che cos'è un numero naturale?

Che cos'è un numero naturale?

Una domanda difficile

Che cos'è un numero naturale?

Una domanda difficile

Che cos'è un numero naturale?

Che cos'è un numero naturale?

Una domanda difficile

Che cos'è un numero naturale?
Benché li usiamo da sempre, solo nel XIX secolo si è capito qualcosa...

Che cos'è un numero naturale?

Una domanda difficile

Che cos'è un numero naturale?
Benché li usiamo da sempre, solo nel XIX secolo si è capito qualcosa...
In fondo, non è molto interessante sapere cosa sono i numeri, ma cosa ci facciamo...

Che cos'è un numero naturale?

Una domanda difficile

Che cos'è un numero naturale?
Benché li usiamo da sempre, solo nel XIX secolo si è capito qualcosa...
In fondo, non è molto interessante sapere cosa sono i numeri, ma cosa ci facciamo...

B.Russell: *La matematica è la sola scienza esatta in cui non si sa mai di cosa si sta parlando*

Che cos'è un numero naturale?

Una domanda difficile

Che cos'è un numero naturale?
Benché li usiamo da sempre, solo nel XIX secolo si è capito qualcosa...
In fondo, non è molto interessante sapere cosa sono i numeri, ma cosa ci facciamo...

B.Russell: *La matematica è la sola scienza esatta in cui non si sa mai di cosa si sta parlando*

Approccio assiomatico Giuseppe Peano (1858-1932)

Che cos'è un numero naturale?

Una domanda difficile

Che cos'è un numero naturale?
Benché li usiamo da sempre, solo nel XIX secolo si è capito qualcosa...
In fondo, non è molto interessante sapere cosa sono i numeri, ma cosa ci facciamo...

B.Russell: *La matematica è la sola scienza esatta in cui non si sa mai di cosa si sta parlando*

Approccio assiomatico Giuseppe Peano (1858-1932)

definirli attraverso le loro proprietà che ci permettono di costruire l'Aritmetica

Assiomi di Peano

Assiomi di Peano

a) 1 è un numero naturale

Assiomi di Peano

a) 1 è un numero naturale

b) Ogni numero naturale ha un successore

Assiomi di Peano

a) 1 è un numero naturale

b) Ogni numero naturale ha un successore

c) 1 non è il successore di alcun numero naturale

Assiomi di Peano

a) 1 è un numero naturale

b) Ogni numero naturale ha un successore

c) 1 non è il successore di alcun numero naturale

d) numeri distinti hanno successori distinti

Assiomi di Peano

a) 1 è un numero naturale

b) Ogni numero naturale ha un successore

c) 1 non è il successore di alcun numero naturale

d) numeri distinti hanno successori distinti

e) L'insieme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ è il più piccolo che soddisfa a)-d)

Assiomi di Peano

a) 1 è un numero naturale

b) Ogni numero naturale ha un successore

c) 1 non è il successore di alcun numero naturale

d) numeri distinti hanno successori distinti

e) L'insieme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ è il più piccolo che soddisfa a)-d)

Dubbio:

Assiomi di Peano

a) 1 è un numero naturale

b) Ogni numero naturale ha un successore

c) 1 non è il successore di alcun numero naturale

d) numeri distinti hanno successori distinti

e) L'insieme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ è il più piccolo che soddisfa a)-d)

Dubbio: 0 è un numero naturale?

Peano alla fine sostituì 1 con 0 nei suoi assiomi

Lo Zero

Tracce al tempo dei Sumeri e degli Egizi.

Il padre dello zero è considerato universalmente il matematico arabo Muhammad ibn Musa al Khwarizmi (IX Secolo) che lo introdusse tra i numeri oggi noti come arabi.

Lo Zero

Tracce al tempo dei Sumeri e degli Egizi.

Il padre dello zero è considerato universalmente il matematico arabo Muhammad ibn Musa al Khwarizmi (IX Secolo) che lo introdusse tra i numeri oggi noti come arabi.

Il termine zero deriva dall'arabo sifr (=nulla) fu usato per la prima volta in Occidente dal matematico italiano Leonardo Fibonacci nel 1202.

L'arrivo dello zero nell'Europa Medievale: Silvestro II (Gerberto d'Aurillac) e i musulmani di Spagna.

Fibonacci e la scrittura dei numeri

Leonardo Fibonacci (1170-1240) è in larga misura *responsabile* della diffusione in Europa della scrittura dei numeri detta *araba* (ma in verità indiana).

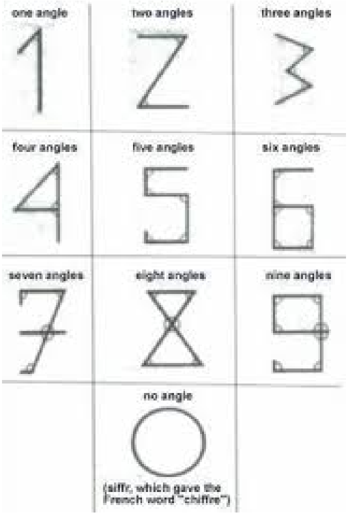
Figlio del rappresentante dei mercanti di Pisa, viaggiò con lui lungo la costa norda-africana del Mediterraneo (da Algeri a Costantinopoli)

Fibonacci e la scrittura dei numeri

Leonardo Fibonacci (1170-1240) è in larga misura *responsabile* della diffusione in Europa della scrittura dei numeri detta *araba* (ma in verità indiana).

Figlio del rappresentante dei mercanti di Pisa, viaggiò con lui lungo la costa norda-africana del Mediterraneo (da Algeri a Costantinopoli)

> *Le nove figure degli Indi sono queste:*
>
> 9 8 7 6 5 4 3 2 1
>
> *pertanto con queste nove figure, e con questo segno* 0, *che gli Arabi chiamano zefiro, sarà scritto qualunque numero.*
>
> *L.Fibonacci, Liber abaci, 1228*


one angle
two angles
three angles
four angles
five angles
six angles
seven angles
eight angles
nine angles
no angle
(siffr, which gave the French word "chiffre")

Dagli assiomi di Peano si deduce tutta l'Aritmetica; si costruiscono gli interi, i razionali e con qualche difficoltà i reali.
(metodo genetico, lo chiama Hilbert in *Über den Zahlbegriff*)

Dagli assiomi di Peano si deduce tutta l'Aritmetica; si costruiscono gli interi, i razionali e con qualche difficoltà i reali.
(metodo genetico, lo chiama Hilbert in *Über den Zahlbegriff*)

- in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si introduce la relazione di equivalenza:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ non è altro che l'insieme delle classi di equivalenza: La coppia (m, n) identificherà in numero intero $m - n$, se $m \geq n$ e il numero $-(n - m)$ se $m < n$.

Dagli assiomi di Peano si deduce tutta l'Aritmetica; si costruiscono gli interi, i razionali e con qualche difficoltà i reali.
(metodo genetico, lo chiama Hilbert in *Über den Zahlbegriff*)

- in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si introduce la relazione di equivalenza:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

  L'insieme $\mathbb{Z}$ non è altro che l'insieme delle classi di equivalenza: La coppia (m, n) identificherà in numero intero $m - n$, se $m \geq n$ e il numero $-(n - m)$ se $m < n$.

- da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ si va in modo simile: in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ una relazione di equivalenza.

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Leftrightarrow mn' = m'n, \quad (m, n), (m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+.$$

Dagli assiomi di Peano si deduce tutta l'Aritmetica; si costruiscono gli interi, i razionali e con qualche difficoltà i reali.
(metodo genetico, lo chiama Hilbert in *Über den Zahlbegriff*)

- in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si introduce la relazione di equivalenza:

  $$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

  L'insieme $\mathbb{Z}$ non è altro che l'insieme delle classi di equivalenza: La coppia (m, n) identificherà in numero intero $m - n$, se $m \geq n$ e il numero $-(n - m)$ se $m < n$.

- da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ si va in modo simile: in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ una relazione di equivalenza.

  $$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Leftrightarrow mn' = m'n, \quad (m, n), (m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+.$$

- da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: sezioni di Dedekind.

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?
- Debiti e crediti (numeri negativi)

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?
- Debiti e crediti (numeri negativi)
- E l'uomo creò gli interi

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

aggiungendo ai naturali loro copie precedute dal segno $-$.

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?
- Debiti e crediti (numeri negativi)
- E l'uomo creò gli interi

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

aggiungendo ai naturali loro copie precedute dal segno $-$.

Già nei papiri egizi si trovano segni particolari per indicare una cifra a debito

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?
- Debiti e crediti (numeri negativi)
- E l'uomo creò gli interi

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

aggiungendo ai naturali loro copie precedute dal segno $-$.

Già nei papiri egizi si trovano segni particolari per indicare una cifra a debito

In antichi testi cinesi: uso di colori diversi

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?
- Debiti e crediti (numeri negativi)
- E l'uomo creò gli interi

  $$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

  aggiungendo ai naturali loro copie precedute dal segno $-$.

  Già nei papiri egizi si trovano segni particolari per indicare una cifra a debito

  In antichi testi cinesi: uso di colori diversi
- Passaggio da Aritmetica ad Algebra

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?
- Debiti e crediti (numeri negativi)
- E l'uomo creò gli interi

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

aggiungendo ai naturali loro copie precedute dal segno $-$.

Già nei papiri egizi si trovano segni particolari per indicare una cifra a debito

In antichi testi cinesi: uso di colori diversi

- Passaggio da Aritmetica ad Algebra
- Aritmetica: da $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$=numero

Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

- Perché non bastano i numeri naturali?
- Debiti e crediti (numeri negativi)
- E l'uomo creò gli interi

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

aggiungendo ai naturali loro copie precedute dal segno $-$.

Già nei papiri egizi si trovano segni particolari per indicare una cifra a debito

In antichi testi cinesi: uso di colori diversi

- Passaggio da Aritmetica ad Algebra
- Aritmetica: da $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$=numero
- Algebra: da *al-gabr* che significa *completamento*, ma anche *aggiustamento*

da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

numeri razionali: rapporti di interi (il secondo non nullo)

$$-\frac{3}{5}, \ \frac{5}{8}, \ -7; \frac{1}{8} = 0,125, \ \frac{2}{3} = 0,6666666666\ldots$$

da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

numeri razionali: rapporti di interi (il secondo non nullo)

$$-\frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ -7;\frac{1}{8}=0,125,\ \frac{2}{3}=0,6666666666\dots$$

I numeri razionali (positivi) furono il primo tipo di numeri, dopo i naturali (ossia gli interi positivi) ad essere riconosciuti come numeri e ad essere comunemente usati in matematica.

da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

numeri razionali: rapporti di interi (il secondo non nullo)

$$-\frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ -7;\ \frac{1}{8} = 0,125,\ \frac{2}{3} = 0,6666666666\ldots$$

I numeri razionali (positivi) furono il primo tipo di numeri, dopo i naturali (ossia gli interi positivi) ad essere riconosciuti come numeri e ad essere comunemente usati in matematica.

Gli Egizi li usavano scomponendoli come somme di frazioni dal numeratore unitario (frazioni egiziane), rappresentandoli ponendo un simbolo sopra la rappresentazione dell'intero corrispondente;

da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

numeri razionali: rapporti di interi (il secondo non nullo)

$$-\frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ -7;\ \frac{1}{8}=0,125,\ \frac{2}{3}=0,6666666666\ldots$$

I numeri razionali (positivi) furono il primo tipo di numeri, dopo i naturali (ossia gli interi positivi) ad essere riconosciuti come numeri e ad essere comunemente usati in matematica.

Gli Egizi li usavano scomponendoli come somme di frazioni dal numeratore unitario (frazioni egiziane), rappresentandoli ponendo un simbolo sopra la rappresentazione dell'intero corrispondente;

$$q=\frac{4}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9} \qquad q=\dot{3}+\dot{9}\,.$$

Euclide

Euclide

Euclide (IV-III sec. a. C.) fu tra i primi a dare una trattazione dei numeri, delle grandezze e dei loro rapporti.

Euclide

Euclide (IV-III sec. a. C.) fu tra i primi a dare una trattazione dei numeri, delle grandezze e dei loro rapporti.
Sappiamo molto poco di E. se non che visse tra il 370 ed il 280 a.C.

Euclide

Euclide (IV-III sec. a. C.) fu tra i primi a dare una trattazione dei numeri, delle grandezze e dei loro rapporti.
Sappiamo molto poco di E. se non che visse tra il 370 ed il 280 a.C.

Tutti associamo il suo nome alla Geometria, detta euclidea, appunto.

Euclide

Euclide (IV-III sec. a. C.) fu tra i primi a dare una trattazione dei numeri, delle grandezze e dei loro rapporti.
Sappiamo molto poco di E. se non che visse tra il 370 ed il 280 a.C.

Tutti associamo il suo nome alla Geometria, detta euclidea, appunto.

Ma la sua opera Elementi, piuttosto ampia (13 libri), è un compendio di tutta la matematica del tempo.

Euclide

Euclide (IV-III sec. a. C.) fu tra i primi a dare una trattazione dei numeri, delle grandezze e dei loro rapporti.
Sappiamo molto poco di E. se non che visse tra il 370 ed il 280 a.C.

Tutti associamo il suo nome alla Geometria, detta euclidea, appunto.

Ma la sua opera Elementi, piuttosto ampia (13 libri), è un compendio di tutta la matematica del tempo.

Provò che i numeri primi sono infiniti.

I numeri primi

I numeri primi

Euclide è forse uno dei primi a porsi un problema che certamente stabilisce un'affermazione non verificabile con l'esperienza

I numeri primi

Euclide è forse uno dei primi a porsi un problema che certamente stabilisce un'affermazione non verificabile con l'esperienza

Un numero primo è *ciò che è misurato solo dall'unità* [Euclide, *Elementi*, L. VII]

I numeri primi

Euclide è forse uno dei primi a porsi un problema che certamente stabilisce un'affermazione non verificabile con l'esperienza

Un numero primo è *ciò che è misurato solo dall'unità* [Euclide, *Elementi*, L. VII]

Oggi diciamo che un numero è primo se è diviso solo da se stesso e da 1

Benché ai suoi tempi si conoscessero pochi numeri primi, nel L. X Euclide enuncia:

I numeri primi

Euclide è forse uno dei primi a porsi un problema che certamente stabilisce un'affermazione non verificabile con l'esperienza

Un numero primo è *ciò che è misurato solo dall'unità* [Euclide, *Elementi*, L. VII]

Oggi diciamo che un numero è primo se è diviso solo da se stesso e da 1

Benché ai suoi tempi si conoscessero pochi numeri primi, nel L. X Euclide enuncia:

> *Teorema. I numeri primi sono di più di ogni collezione data di numeri primi.*
>
> *Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che ce ne sia solo un numero finito, e pensiamo di elencarli tutti. Allora, a partire da questo elenco, con un certo procedimento [] si costruisce un nuovo numero che si dimostra essere primo e che d'altra parte è più grande di tutti i numeri primi dell'elenco. Assurdo, perché allora vuol dire che l'elenco non era completo. Così il teorema è dimostrato.

I numeri primi sono solo apparentemente dei semplici numeri naturali con una proprietà un po' speciale.

I numeri primi sono solo apparentemente dei semplici numeri naturali con una proprietà un po' speciale.

Ma sono anche i mattoni con cui si possono costruire tutti i numeri (ogni numero naturale non primo è il prodotto di primi)

I numeri primi sono solo apparentemente dei semplici numeri naturali con una proprietà un po' speciale.

Ma sono anche i mattoni con cui si possono costruire tutti i numeri (ogni numero naturale non primo è il prodotto di primi)

A parte le curiosità matematiche che li riguardano, importanza cruciale in crittografia (i codici di sicurezza delle transazioni commerciali su internet, o la protezione dei bancomat, fanno uso di numeri primi di oltre cento cifre).

I numeri primi sono solo apparentemente dei semplici numeri naturali con una proprietà un po' speciale.

Ma sono anche i mattoni con cui si possono costruire tutti i numeri (ogni numero naturale non primo è il prodotto di primi)

A parte le curiosità matematiche che li riguardano, importanza cruciale in crittografia (i codici di sicurezza delle transazioni commerciali su internet, o la protezione dei bancomat, fanno uso di numeri primi di oltre cento cifre).

Molti tentativi di trovare un algoritmo che produca numeri primi. Se si trovasse, addio sistemi di sicurezza!

Numeri di Fermat

Una delle poche congetture sbagliate di Pierre de Fermat (1601-1665):

Numeri di Fermat

Una delle poche congetture sbagliate di Pierre de Fermat (1601-1665):

I numeri della forma $2^{2^n}+1$ sono tutti primi.

Numeri di Fermat

Una delle poche congetture sbagliate di Pierre de Fermat (1601-1665):

I numeri della forma $2^{2^n} + 1$ sono tutti primi.

I primi 4 lo sono: 5, 17, 257, 65537

Numeri di Fermat

Una delle poche congetture sbagliate di Pierre de Fermat (1601-1665):

I numeri della forma $2^{2^n}+1$ sono tutti primi.

I primi 4 lo sono: 5, 17, 257, 65537

Il quinto 4294967277 non lo è: $4294967277 = 641 \cdot 6700417$

Numeri di Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648), amico e corrispondente di Fermat, si interessò alla *produzione* di primi.

I numeri di Mercenne sono i numeri primi che si ottengono mediante la formula

$$M_p = 2^p - 1, \quad p \text{ primo}$$

Esempi: $M_2 = 3,\ M_3 = 7,\ M_5 = 31,\ M_7 = 127$

Numeri di Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648), amico e corrispondente di Fermat, si interessò alla *produzione* di primi.

I numeri di Mercenne sono i numeri primi che si ottengono mediante la formula

$$M_p = 2^p - 1, \quad p \text{ primo}$$

Esempi: $M_2 = 3,\ M_3 = 7,\ M_5 = 31,\ M_7 = 127$

Sono noti 48 primi di Mersenne: il più grande è $2^{57885161} - 1$ (39 giorni di calcolo)

Sorprendente: riuscì ad asserire che $2^{257} - 1$ fosse primo (è un numero di 77 cifre!) con i mezzi di calcolo a sua disposizione.

I numeri perfetti

Un numero è perfetto se è somma dei suoi divisori (eccetto se stesso, ovviamente)

Esempio: $6 = 1 + 2 + 3 \quad 28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1 \quad 8128 = \cdots$

> *. . . Dio ha compiuto le sue opere in sei giorni per il fatto che sei è un numero perfetto.*
>
> *Agostino d'Ippona,* De Genesi ad litteram

I numeri perfetti

Un numero è perfetto se è somma dei suoi divisori (eccetto se stesso, ovviamente)

Esempio: $6 = 1 + 2 + 3$ $\quad 28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$ $\quad 8128 = \cdots$

> *. . . Dio ha compiuto le sue opere in sei giorni per il fatto che sei è un numero perfetto.*
>
> *Agostino d'Ippona,* De Genesi ad litteram

Euclide: se $p = 1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n$ è un numero primo allora $2^n \cdot p$ è un numero perfetto.

I numeri perfetti

Un numero è perfetto se è somma dei suoi divisori (eccetto se stesso, ovviamente)

Esempio: $6 = 1 + 2 + 3 \quad 28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1 \quad 8128 = \cdots$

> *. . . Dio ha compiuto le sue opere in sei giorni per il fatto che sei è un numero perfetto.*
>
> *Agostino d'Ippona,* De Genesi ad litteram

Euclide: se $p = 1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n$ è un numero primo allora $2^n \cdot p$ è un numero perfetto.

I numeri perfetti di Euclide sono pari. Eulero dimostrò che tutti i pari perfetti sono della forma trovata da Euclide.

Un problema aperto: Esistono numeri perfetti dispari?

Altri misteri dei numeri primi

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:
tra 1 e 10 ce ne sono 4

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:
tra 1 e 10 ce ne sono 4
tra 11 e 100 ce ne sono 21

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:
tra 1 e 10 ce ne sono 4
tra 11 e 100 ce ne sono 21
tra 101 e 1000 ce ne sono 143

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:

tra 1 e 10 ce ne sono 4

tra 11 e 100 ce ne sono 21

tra 101 e 1000 ce ne sono 143

tra 1001 e 10000 ce ne sono 1061

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:
tra 1 e 10 ce ne sono 4
tra 11 e 100 ce ne sono 21
tra 101 e 1000 ce ne sono 143
tra 1001 e 10000 ce ne sono 1061

Crescita piuttosto lenta

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:
tra 1 e 10 ce ne sono 4
tra 11 e 100 ce ne sono 21
tra 101 e 1000 ce ne sono 143
tra 1001 e 10000 ce ne sono 1061

Crescita piuttosto lenta

i numeri primi $< 10^n$ sono circa $\frac{10^n}{n \cdot 2{,}3}$ (teorema dei numeri primi, Eulero - Legendre)

Altri misteri dei numeri primi

la loro distribuzione:
tra 1 e 10 ce ne sono 4
tra 11 e 100 ce ne sono 21
tra 101 e 1000 ce ne sono 143
tra 1001 e 10000 ce ne sono 1061

Crescita piuttosto lenta

i numeri primi $< 10^n$ sono circa $\frac{10^n}{n \cdot 2{,}3}$ (teorema dei numeri primi, Eulero - Legendre)

Studi molto importanti di C. F. Gauss, B. Riemann.

I primi gemelli

I primi gemelli

Primi gemelli: numeri primi che differiscono di 2.

Esempi: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)

I primi gemelli

Primi gemelli: numeri primi che differiscono di 2.

Esempi: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)

Ancora Euclide:

I primi gemelli

Primi gemelli: numeri primi che differiscono di 2.

Esempi: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)

Ancora Euclide:

Esistono infiniti numeri primi p tale che anche $p+2$ sia un numero primo

I primi gemelli

Primi gemelli: numeri primi che differiscono di 2.

Esempi: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)

Ancora Euclide:

Esistono infiniti numeri primi p tale che anche $p+2$ sia un numero primo

È una congettura: non sappiamo se è vero.

I primi gemelli

Primi gemelli: numeri primi che differiscono di 2.

Esempi: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)

Ancora Euclide:

Esistono infiniti numeri primi p tale che anche $p + 2$ sia un numero primo

È una congettura: non sappiamo se è vero.

ma gli indizi sono forti. . .

P. Giordano, La solitudine dei numeri primi, 2008

*I numeri primi sono divisibili soltanto per uno e per se stessi. Se ne stanno al loro posto nell'infinita serie dei numeri naturali, schiacciati come tutti fra due, ma un passo più in là rispetto agli altri. Sono numeri sospettosi e solitari e per questo Mattia li trovava meravigliosi. [...] sospettava che anche a loro sarebbe piaciuto essere come tutti, solo dei numeri qualunque, ma che per qualche motivo non ne fossero capaci [...] In un corso del primo anno Mattia aveva studiato che tra i numeri primi ce ne sono alcuni ancora più speciali. I matematici li chiamano numeri gemelli: sono coppie di numeri primi che se ne stanno vicini, anzi quasi vicini, perché fra di loro vi è sempre un numero pari che gli impedisce di toccarsi per davvero. Numeri come l'*11 *e il* 13*, come il* 17 *e il* 19*, il* 41 *e il* 43*. Se si ha pazienza di andare avanti a contare, si scopre che queste coppie via via si diradano. Ci si imbatte in numeri primi sempre più isolati, smarriti in quello spazio silenzioso e cadenzato [...]*

Fibonacci ed i suoi numeri

I numeri di Fibonacci sono popolari non solo tra i matematici, ma anche tra gli appassionati di libri gialli e di storie esoteriche.

Si parte da $1, 1$. Sommmandoli si costruisce $1, 1, 2$
Sommando gli ultimi due $\rightarrow (1, 1, 2, 3)$ e si ripete...

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377, \ldots$$

Fibonacci ed i suoi numeri

I numeri di Fibonacci sono popolari non solo tra i matematici, ma anche tra gli appassionati di libri gialli e di storie esoteriche.

Si parte da $1, 1$. Sommmandoli si costruisce $1, 1, 2$
Sommando gli ultimi due $\rightarrow (1, 1, 2, 3)$ e si ripete...

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377, \ldots$$

377 soluzione del problema dei conigli proposto da F. nel Liber abaci:

> *Quante coppie di conigli saranno generate in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese una coppia ne genera una nuova che diventa fertile dal secondo mese in poi?*

Fibonacci ed i suoi numeri

I numeri di Fibonacci sono popolari non solo tra i matematici, ma anche tra gli appassionati di libri gialli e di storie esoteriche.

Si parte da $1, 1$. Sommmandoli si costruisce $1, 1, 2$
Sommando gli ultimi due $\rightarrow (1, 1, 2, 3)$ e si ripete...

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377, \ldots$$

377 soluzione del problema dei conigli proposto da F. nel Liber abaci:

> *Quante coppie di conigli saranno generate in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese una coppia ne genera una nuova che diventa fertile dal secondo mese in poi?*

La Natura conosce i numeri di Fibonacci:

Fibonacci ed i suoi numeri

I numeri di Fibonacci sono popolari non solo tra i matematici, ma anche tra gli appassionati di libri gialli e di storie esoteriche.

Si parte da $1, 1$. Sommmandoli si costruisce $1, 1, 2$
Sommando gli ultimi due $\rightarrow (1, 1, 2, 3)$ e si ripete...

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377, \ldots$$

377 soluzione del problema dei conigli proposto da F. nel Liber abaci:

> *Quante coppie di conigli saranno generate in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese una coppia ne genera una nuova che diventa fertile dal secondo mese in poi?*

La Natura conosce i numeri di Fibonacci:

Le margherite hanno 34 o 55 o 89 petali.

Fibonacci ed i suoi numeri

I numeri di Fibonacci sono popolari non solo tra i matematici, ma anche tra gli appassionati di libri gialli e di storie esoteriche.

Si parte da $1, 1$. Sommmandoli si costruisce $1, 1, 2$
Sommando gli ultimi due $\rightarrow (1, 1, 2, 3)$ e si ripete...

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377, \ldots$$

377 soluzione del problema dei conigli proposto da F. nel Liber abaci:

> *Quante coppie di conigli saranno generate in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese una coppia ne genera una nuova che diventa fertile dal secondo mese in poi?*

La Natura conosce i numeri di Fibonacci:

Le margherite hanno 34 o 55 o 89 petali.

i semi di girasole sono disposti in 34 sprirali in senso orario e 55 in senso antiorario

Fibonacci ed i suoi numeri

I numeri di Fibonacci sono popolari non solo tra i matematici, ma anche tra gli appassionati di libri gialli e di storie esoteriche.

Si parte da $1, 1$. Sommmandoli si costruisce $1, 1, 2$
Sommando gli ultimi due $\rightarrow (1, 1, 2, 3)$ e si ripete...

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377, \ldots$$

377 soluzione del problema dei conigli proposto da F. nel Liber abaci:

> *Quante coppie di conigli saranno generate in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese una coppia ne genera una nuova che diventa fertile dal secondo mese in poi?*

La Natura conosce i numeri di Fibonacci:

Le margherite hanno 34 o 55 o 89 petali.

i semi di girasole sono disposti in 34 sprirali in senso orario e 55 in senso antiorario

il numero di spirali di alcuni cavolfiori...

Rapporti e proporzioni negli *Elementi* di Euclide

Rapporti e proporzioni negli *Elementi* di Euclide

Il concetto di rapporto non è del tutto chiaro nemmeno negli Elementi di Euclide

Rapporti e proporzioni negli *Elementi* di Euclide

Il concetto di rapporto non è del tutto chiaro nemmeno negli Elementi di Euclide

l'intero Libro V è dedicato alla teoria delle proporzioni

Rapporti e proporzioni negli *Elementi* di Euclide

Il concetto di rapporto non è del tutto chiaro nemmeno negli Elementi di Euclide

l'intero Libro V è dedicato alla teoria delle proporzioni

un rapporto è una relazione dimensionale tra due grandezze dello stesso tipo

Rapporti e proporzioni negli *Elementi* di Euclide

Il concetto di rapporto non è del tutto chiaro nemmeno negli Elementi di Euclide

l'intero Libro V è dedicato alla teoria delle proporzioni

un rapporto è una relazione dimensionale tra due grandezze dello stesso tipo

due grandezze possono essere poste in rapporto se esiste un multiplo intero della prima che supera l'altra (proprietà di Archimede).

Rapporti e proporzioni negli *Elementi* di Euclide

Il concetto di rapporto non è del tutto chiaro nemmeno negli Elementi di Euclide

l'intero Libro V è dedicato alla teoria delle proporzioni

un rapporto è una relazione dimensionale tra due grandezze dello stesso tipo

due grandezze possono essere poste in rapporto se esiste un multiplo intero della prima che supera l'altra (proprietà di Archimede).

La definizione di grandezze commensurabili apre il Libro X e stabilisce che queste sono le grandezze che hanno una misura comune, ovvero sono multipli interi dello stesso numero.

La crisi dei pitagorici

La crisi dei pitagorici

Pitagora (VI sec a.C.) e i pitagorici basavano la loro concezione del mondo sui rapporti tra numeri interi, ovvero sui numeri razionali, e pensavano che ogni cosa esistente al mondo potesse essere ridotta a tali numeri:

La crisi dei pitagorici

Pitagora (VI sec a.C.) e i pitagorici basavano la loro concezione del mondo sui rapporti tra numeri interi, ovvero sui numeri razionali, e pensavano che ogni cosa esistente al mondo potesse essere ridotta a tali numeri:

> *La matematica è l'alfabeto con il quale Dio ha scritto il mondo*
>
> *Pitagora*

La crisi dei pitagorici

Pitagora (VI sec a.C.) e i pitagorici basavano la loro concezione del mondo sui rapporti tra numeri interi, ovvero sui numeri razionali, e pensavano che ogni cosa esistente al mondo potesse essere ridotta a tali numeri:

> *La matematica è l'alfabeto con il quale Dio ha scritto il mondo*
>
> *Pitagora*

Ma qualcosa che essi stessi scoprirono distrusse questa concezione.

$\sqrt{2}$ e Ippaso di Metaponto

Il primo numero strano ad essere scoperto fu $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ e Ippaso di Metaponto

Il primo numero strano ad essere scoperto fu $\sqrt{2}$

Secondo Giamblico (*La vita pitagorica* $\sim$ *250 a.C.*) Ippaso di Metaponto scopre, applicando il teorema del suo maestro, che qualcosa non quadra . . .

$\sqrt{2}$ e Ippaso di Metaponto

Il primo numero strano ad essere scoperto fu $\sqrt{2}$

Secondo Giamblico (*La vita pitagorica* $\sim$ *250 a.C.*) Ippaso di Metaponto scopre, applicando il teorema del suo maestro, che qualcosa non quadra . . .

Questa scoperta e la sua divulgazione costeranno la vita di Ippaso.

$\sqrt{2}$

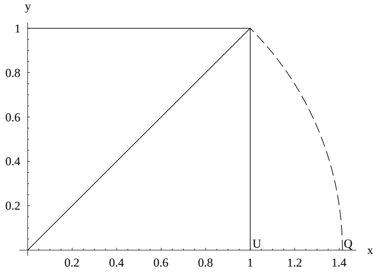


Figure: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, irrazionale!

TEOREMA : non esiste alcun numero razionale $q = \frac{m}{n} > 0$ tale che $q^2 = 2$.

Ma allora esiste $\sqrt{2}$?

Ma allora esiste $\sqrt{2}$?

Sappiamo con certezza che $\sqrt{2}$ è irrazionale

Ma allora esiste $\sqrt{2}$?

Sappiamo con certezza che $\sqrt{2}$ è irrazionale

allineamento decimale illimitato e non periodico.

Ma allora esiste $\sqrt{2}$?

Sappiamo con certezza che $\sqrt{2}$ è irrazionale

allineamento decimale illimitato e non periodico.

certamente esiste una cifra che si trova al posto 10^{324}. Qual è?

Ma allora esiste $\sqrt{2}$?

Sappiamo con certezza che $\sqrt{2}$ è irrazionale

allineamento decimale illimitato e non periodico.

certamente esiste una cifra che si trova al posto 10^{324}. Qual è?

praticamente impossibile determinarlo...

Ma allora esiste $\sqrt{2}$?

Sappiamo con certezza che $\sqrt{2}$ è irrazionale

allineamento decimale illimitato e non periodico.

certamente esiste una cifra che si trova al posto 10^{324}. Qual è?

praticamente impossibile determinarlo...

ma allora esiste davvero?

$\sim 10^{80}$ numero di particelle elementari dell'universo visibile
$\sim 10^{123}$ numero di possibili partite di scacchi

La costruzione dei numeri reali è essenzialmente dovuta a Richard Dedekind (1831-1916).

La costruzione dei numeri reali è essenzialmente dovuta a Richard Dedekind (1831-1916).

PROBLEMA: superare la diversità intrinseca tra la continuità della retta e l'esistenza di buchi nei numeri razionali

La costruzione dei numeri reali è essenzialmente dovuta a Richard Dedekind (1831-1916).

PROBLEMA: superare la diversità intrinseca tra la continuità della retta e l'esistenza di buchi nei numeri razionali

La diagonale del quadrato di lato 1 la possiamo riportare sulla retta, utilizzando un compasso, ma il segmento che si ottiene non ha misura razionale.

La costruzione dei numeri reali è essenzialmente dovuta a Richard Dedekind (1831-1916).

PROBLEMA: superare la diversità intrinseca tra la continuità della retta e l'esistenza di buchi nei numeri razionali

La diagonale del quadrato di lato 1 la possiamo riportare sulla retta, utilizzando un compasso, ma il segmento che si ottiene non ha misura razionale.
L'esistenza dei numeri irrazionali ci porta ad una concreta percezione dell'infinito matematico.

La costruzione dei numeri reali è essenzialmente dovuta a Richard Dedekind (1831-1916).

PROBLEMA: superare la diversità intrinseca tra la continuità della retta e l'esistenza di buchi nei numeri razionali

La diagonale del quadrato di lato 1 la possiamo riportare sulla retta, utilizzando un compasso, ma il segmento che si ottiene non ha misura razionale.
L'esistenza dei numeri irrazionali ci porta ad una concreta percezione dell'infinito matematico.
Ed è per questo che i numeri reali possono apparire misteriosi...

Come definire $\sqrt{2}$?

Come definire $\sqrt{2}$?

$$A = \{q \in \mathbb{Q}, (q < 0) \vee (q \geq 0,\ q^2 < 2)\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q}, q > 0,\ q^2 > 2\}$$

Come definire $\sqrt{2}$?

$$A = \{q \in \mathbb{Q}, (q < 0) \vee (q \geq 0,\ q^2 < 2)\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q}, q > 0,\ q^2 > 2\}$$

Sezione di Dedekind (ogni elemento di A è $<$ di ogni elemento di B e $A \cup B = \mathbb{Q}$)

Come definire $\sqrt{2}$?

$$A = \{q \in \mathbb{Q}, (q < 0) \vee (q \geq 0,\ q^2 < 2)\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q}, q > 0,\ q^2 > 2\}$$

Sezione di Dedekind (ogni elemento di A è $<$ di ogni elemento di B e $A \cup B = \mathbb{Q}$)

A non ha massimo in $\mathbb{Q}$; B non ha minimo in $\mathbb{Q}$

Come definire $\sqrt{2}$?

$$A = \{q \in \mathbb{Q}, (q < 0) \vee (q \geq 0,\ q^2 < 2)\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q}, q > 0,\ q^2 > 2\}$$

Sezione di Dedekind (ogni elemento di A è $<$ di ogni elemento di B e $A \cup B = \mathbb{Q}$)
A non ha massimo in $\mathbb{Q}$; B non ha minimo in $\mathbb{Q}$
ASSIOMA: esiste un numero (sarà proprio $\sqrt{2}$) che separa le due classi: è più grande di ogni elemento di A e più piccolo di ogni elemento di B.

Come definire $\sqrt{2}$?

$$A = \{q \in \mathbb{Q}, (q < 0) \vee (q \geq 0,\ q^2 < 2)\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q}, q > 0,\ q^2 > 2\}$$

Sezione di Dedekind (ogni elemento di A è $<$ di ogni elemento di B e $A \cup B = \mathbb{Q}$)
A non ha massimo in $\mathbb{Q}$; B non ha minimo in $\mathbb{Q}$
ASSIOMA: esiste un numero (sarà proprio $\sqrt{2}$) che separa le due classi: è più grande di ogni elemento di A e più piccolo di ogni elemento di B.

Definite operazioni e ordine, nasce $\mathbb{R}$ campo ordinato .

Numeri iperreali

Costruiti da Abraham Robinson 1966

Numeri iperreali

Costruiti da Abraham Robinson 1966

Si tratta di un ampliamento ${}^*\mathbb{R}$ dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

Numeri iperreali

Costruiti da Abraham Robinson 1966

Si tratta di un ampliamento ${}^*\mathbb{R}$ dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

In esso esistono numeri infinitesimi e numeri infiniti

Numeri iperreali

Costruiti da Abraham Robinson 1966

Si tratta di un ampliamento $^*\mathbb{R}$ dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

In esso esistono numeri infinitesimi e numeri infiniti

Numeri infinitesimi: più piccoli di un qualsiasi numero positivo ma maggiori di 0.

Numeri iperreali

Costruiti da Abraham Robinson 1966

Si tratta di un ampliamento ${}^*\mathbb{R}$ dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

In esso esistono numeri infinitesimi e numeri infiniti

Numeri infinitesimi: più piccoli di un qualsiasi numero positivo ma maggiori di 0.

Numeri infiniti: più grandi di qualsiasi numero reale positivo.

Numeri iperreali

Costruiti da Abraham Robinson 1966

Si tratta di un ampliamento ${}^*\mathbb{R}$ dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

In esso esistono numeri infinitesimi e numeri infiniti

Numeri infinitesimi: più piccoli di un qualsiasi numero positivo ma maggiori di 0.

Numeri infiniti: più grandi di qualsiasi numero reale positivo.

Ogni numero reale è circondato da una nuvoletta di numeri ad esso infinitamente vicini.
Costruzione perfettamente rigorosa. Campo ordinato

Il Paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ha dato contributi fondamentali alla teoria degli insiemi e a quella dei numeri.

Il Paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ha dato contributi fondamentali alla teoria degli insiemi e a quella dei numeri.

Constatazioni: $\begin{cases} \text{L'insieme } \mathbb{N} \text{ dei naturali è costituito da infiniti elementi.} \\ \text{L'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali è costituito da infiniti elementi.} \end{cases}$

Il Paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ha dato contributi fondamentali alla teoria degli insiemi e a quella dei numeri.

$$\text{Constatazioni: } \begin{cases} \text{L'insieme } \mathbb{N} \text{ dei naturali è costituito da infiniti elementi.} \\ \text{L'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali è costituito da infiniti elementi.} \end{cases}$$

Nel 1874 Cantor prova che gli infiniti di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$ non sono uguali!

"La cardinalità di $\mathbb{N}$ è strettamente minore della cardinalità di $\mathbb{R}$ "

Il Paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ha dato contributi fondamentali alla teoria degli insiemi e a quella dei numeri.

Constatazioni: $\begin{cases} \text{L'insieme } \mathbb{N} \text{ dei naturali è costituito da infiniti elementi.} \\ \text{L'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali è costituito da infiniti elementi.} \end{cases}$

Nel 1874 Cantor prova che gli infiniti di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$ non sono uguali!

"La cardinalità di $\mathbb{N}$ è strettamente minore della cardinalità di $\mathbb{R}$ "

Nel 1883 prova che esistono infiniti tipi diversi di infinito:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots$$

Il Paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ha dato contributi fondamentali alla teoria degli insiemi e a quella dei numeri.

Constatazioni: $\begin{cases} \text{L'insieme } \mathbb{N} \text{ dei naturali è costituito da infiniti elementi.} \\ \text{L'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali è costituito da infiniti elementi.} \end{cases}$

Nel 1874 Cantor prova che gli infiniti di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$ non sono uguali!

"La cardinalità di $\mathbb{N}$ è strettamente minore della cardinalità di $\mathbb{R}$ "

Nel 1883 prova che esistono infiniti tipi diversi di infinito:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots$$

Doppio ruolo dei numeri: cardinali e ordinali

Il Paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ha dato contributi fondamentali alla teoria degli insiemi e a quella dei numeri.

Constatazioni: $\begin{cases} \text{L'insieme } \mathbb{N} \text{ dei naturali è costituito da infiniti elementi.} \\ \text{L'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali è costituito da infiniti elementi.} \end{cases}$

Nel 1874 Cantor prova che gli infiniti di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$ non sono uguali!

"La cardinalità di $\mathbb{N}$ è strettamente minore della cardinalità di $\mathbb{R}$ "

Nel 1883 prova che esistono infiniti tipi diversi di infinito:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots$$

Doppio ruolo dei numeri: cardinali e ordinali

C. introduce i numeri transfiniti (ordinali) ω, $\omega + 1$, 2ω...

Il Paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ha dato contributi fondamentali alla teoria degli insiemi e a quella dei numeri.

Constatazioni: $\begin{cases} \text{L'insieme } \mathbb{N} \text{ dei naturali è costituito da infiniti elementi.} \\ \text{L'insieme } \mathbb{R} \text{ dei reali è costituito da infiniti elementi.} \end{cases}$

Nel 1874 Cantor prova che gli infiniti di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$ non sono uguali!

"La cardinalità di $\mathbb{N}$ è strettamente minore della cardinalità di $\mathbb{R}$ "

Nel 1883 prova che esistono infiniti tipi diversi di infinito:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots$$

Doppio ruolo dei numeri: cardinali e ordinali

C. introduce i numeri transfiniti (ordinali) ω, $\omega + 1$, 2ω...

Questioni di natura filosofica e teologica alle quali non si sottrasse.

Reazioni:

Il lavoro di Cantor $[\cdots]$ non è matematica ma misticismo.

L. Kronecker

Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi.

D. Hilbert

Reazioni:

> *Il lavoro di Cantor $[\cdots]$ non è matematica ma misticismo.*
>
> L. Kronecker

> *Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi.*
>
> D. Hilbert

Ma i numeri surreali di Conway creeranno per noi un paradiso ancora più grande!. . .

In principio era il vuoto (von Neumann e Conway)

In principio era il vuoto (von Neumann e Conway)

Modello di J. von Neumann (1903-1957) di $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc}
\emptyset & \to & 0 \\
\{\emptyset\} & \to & 1 \\
\{\emptyset, \{\emptyset\}\} & \to & 2 \\
\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} & \to & 3 \\
\ldots\ldots & \to & \ldots
\end{array}$$

Costruzione di Conway

Mette assieme l'idea di Dedekind (coppie d'insiemi) e l'idea costruttiva di von Neumann

Un numero è una coppia (S, D) di numeri costruiti nei "giorni precedenti", seguendo le due regole descritte nelle prime slide.

C. definisce operazioni, addizione e moltiplicazione e ordine.

Passo dopo passo (induttivamente!) si costruiscono

- tutti i numeri interi $(\emptyset, \emptyset) = 0$, $(\{0\}, \emptyset) = 1$ $(\emptyset, \{0\}) = -1$ e $-1 < 0 < 1$
- tutti i razionali $(\{0\}, \{1\}) = \frac{1}{2}$ (perché $(\{0\}, \{1\}) + (\{0\}, \{1\}) = (\{0\}, \emptyset) = 1$)
- tutti i reali (stesse sezioni di Dedekind)
- tutti gli iperreali $(\{0\}, \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \cdots)$ infinitesimo positivo
- tutti i numeri transfiniti (Cantor) $(\{1, 2, 3, \cdots\}, \emptyset) = \omega$ ma anche tutti gli $\omega + n$, frazioni di ω, radici di ω...

La definizione e le operazioni sono intricate.
Alla fine nasce **No**, campo ordinato.

I numeri surreali corrispondono a

"un metodo di generazione uniforme di tutti i numeri noti in un'unica famiglia che comprende interi, razionali, reali, infinitesimi e infiniti, ordinali e cardinali infiniti... e prevede che le operazioni si applichino a tutti indipendentemente dalla specie a cui appartengono, per esempio reale per ordinale, in una prospettiva di ibridazione, o incrocio interraziale".

Kronecker o i Neuroscienziati?

Kronecker o i Neuroscienziati?

Le costruzioni dei numeri e sui numeri fin qui viste (metodo genetico), le attuali conoscenze sui meccanismi della mente, i risultati sperimentali dei neuroscienziati, danno sostegno alla tesi di uno di questi, Randy Gallistel, che sia stata l'evoluzione a creare i numeri.

Kronecker o i Neuroscienziati?

Le costruzioni dei numeri e sui numeri fin qui viste (metodo genetico), le attuali conoscenze sui meccanismi della mente, i risultati sperimentali dei neuroscienziati, danno sostegno alla tesi di uno di questi, Randy Gallistel, che sia stata l'evoluzione a creare i numeri.

L'ipotesi di una matematica platonica che trascende la mente umana e dà struttura all'universo sarebbe nient'altro che materia di *fede*.

Conclusione

Conclusione

Ma, sia che i numeri esistano in Natura, sia che appaiano come prodotto evolutivo

Conclusione

Ma, sia che i numeri esistano in Natura, sia che appaiano come prodotto evolutivo

Creatività e immaginazione hanno svolto un ruolo cruciale nel sondare il mistero dei numeri, fondamento di tutta la matematica.

Conclusione

Ma, sia che i numeri esistano in Natura, sia che appaiano come prodotto evolutivo

Creatività e immaginazione hanno svolto un ruolo cruciale nel sondare il mistero dei numeri, fondamento di tutta la matematica.

> *Da qualche parte tra la possibilità ed il mistero si trova l'immaginazione, l'unica cosa che protegga la nostra libertà, nonostante il fatto che la gente continui a cercare di ridimensionarla o spazzarla via del tutto.*
>
> *Luis Buñuel, 1972*

Conclusione

Ma, sia che i numeri esistano in Natura, sia che appaiano come prodotto evolutivo

Creatività e immaginazione hanno svolto un ruolo cruciale nel sondare il mistero dei numeri, fondamento di tutta la matematica.

> *Da qualche parte tra la possibilità ed il mistero si trova l'immaginazione, l'unica cosa che protegga la nostra libertà, nonostante il fatto che la gente continui a cercare di ridimensionarla o spazzarla via del tutto.*
>
> *Luis Buñuel, 1972*

GRAZIE!

Per saperne di più

- H. Wang, Dalla matematica alla filosofia, Bollati Boringhieri, 1984
- P. Davies, La mente di Dio, Mondadori 1993
- G. Lolli, Tavoli, sedie, boccali di birra (David Hilbert e la matematica del Novecento), R. Cortina ed., 2016
- P.Zellini, La matematica degli dèi e gli algoritmi degli uomini, Adelphi,2016
- U. Bottazzini, Numeri, il Mulino, 2015
- D. Knut, Numeri surreali, Franco Angeli ed., 2016

Un cenno...

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ insieme delle successioni di numeri reali

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots a_n \ldots\}$$

Si dividono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ in insiemi piccoli e grandi mediante indicatore m che assume solo i valori $0, 1$. (misura finitamente additiva)
$m(A) = 0$ se A è finito; $m(\mathbb{N}) = 1$.
$A \subset \mathbb{N}$ è piccolo se $m(A) = 0$ o grande se $m(A) = 1$.

$\{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow m\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} = 1$

$$^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$$

è l'insieme dei numeri iperreali.

Ordine $< a > < < b >$ se $m\{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} = 1$
Contiene numeri infiniti $< \{n\} >$ e numeri infinitesimi $< \{\frac{1}{n}\} >$